

مقدمه ناشر

خیلیا برای فرار از درس ریاضی و خیلیا به عشق درس ریاضی رشته‌شون رو انتخاب می‌کنن. گروه اول همیشه در شگفت‌اند که این ریاضی مگه چی داره که بعضیا دیوانه‌وار عاشقش و باهاش حال می‌کنن؟! ولی گروه دوم، مثل خود شما که رشتشون ریاضیه بهتر از هر کس می‌دونین که «لذتی که در حل مسئله هست حتی در انتقام هم نیست!». اون لحظه باشکوه، حس عجیبی به آدم می‌ده. همون لحظه که میگی «آهان! فهمیدم!». همون لحظه کشف جواب! انگار با آرپی جی زدی وسط تانک دشمن. هر چی مسئله چغرترو و بدبدن‌تر، این حس قوی‌تر و لذت‌بخش‌تر. نمی‌دونم توی اون لحظه کدوم محرک باعث می‌شه که چه بخشی از مغزمون دستور صادر کنه تا چه هورمونی از کجای بدنمون فوران کنه! ولی هر چی که هست معرکه است. امیدواریم این کتاب براتون پر از این لحظه‌های ناب باشه و با خوندنش هم حسابی کیف کنید و هم توی کنکورها حسابی بترکونید.

برای به ثمر رسیدن این کتاب آدمای مهم و زیادی زحمت کشیدن. دم همتون گرم. رسول جان و سروش جان، خسته نباشین! انصافن خوب کتابی شد. مصطفی جان، ممنون که از اول تا آخر خط کنارمون بودی. زنده باد دوستای خستگی‌ناپذیرمون در واحد تألیف و تولید خیلی سبز و درود بر ویراستارای خوب و دقیقمون.

بروبچه‌های ریاضی، دم شما هم گرم

مواظب خودتون باشید!

تقديم به همه دانش آموزان و معلم های خوب ایران

مقدمه مولفان

به کتاب گسسته خیلی سبز خوش آمدید.

نحوه استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمان در مورد ترتیب خواندن درس نامه ها و حل کردن تست ها و بررسی پاسخ ها، برنامه ریزی و اجرا کنید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می کنید توصیه ما این است که: **۱** اول درس نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲** چیزهایی از درس نامه که مهم است را مشخص کنید، یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳** یک بار دیگر فقط تست های درس نامه را حل کنید. **۴** بروید سراغ تست ها، پاسخ تست ها را اول از پاسخ نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ های تشریحی را بخوانید.

ساختار کتاب:

درس نامه:

- ۱** در درس نامه آیکن های **نکته**، **تذکره** و **یادآوری** داریم:
نکته نشان دهنده نکته ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می شود تست را سریع تر و بهتر حل کنید.
تذکره نشان دهنده یک اشاره کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می شود مطلب را بهتر بفهمید.
یادآوری نشان دهنده یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس های قبلی یا سال های قبل است.
۲ در درس نامه کتاب سعی کرده ایم از جدول، نمودار، دسته بندی و هر چیزی که باعث می شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول ها باید حسابی وقت بگذارید.
۳ تک تک مثال ها و تست های درس نامه به گونه ای انتخاب شده اند که اولاً کاربرد نکته ها و مفاهیم گفته شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه های اصلی و پرتکرار تست های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می کنیم بعد از این که درس نامه هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست های درس نامه را حل کنید.

تست ها:

- در انتخاب و طرح تست ها به تغییر فضای دفترچه کنکور توجه ویژه ای شده است و حتماً با حل تمام تست های این کتاب تا حد زیادی با ذائقه طراحان کنکور آشنا خواهید شد:
- ۱** تست ها را با وسواس خیلی زیادی چیده ایم تا روند تسلط شما بر مطالب آسان تر شود، پس حتماً سعی کنید با همان ترتیب تست ها را حل کنید.
 - ۲** تمامی تمارین و مثال های کتاب درسی و کنکور سال های اخیر را در کتاب خواهید دید، حتماً توجه ویژه ای به آن ها داشته باشید.

۳ در انتهای هر کدام از فصل‌ها یک آزمون داریم. توصیه شدید و اکید داریم که تا وقتی همه مطالب فصل را خوب یاد نگرفته‌اید و تست‌های فصل را حل و دوره نکرده‌اید سراغ آزمون نروید.

۴ در آخر هر فصل تعدادی تست سری Z داریم که مخصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند و البته برای آن‌هایی است که می‌خواهند در آزمون‌های آزمایشی و بعدترها در کنکور، درس ریاضی را صد بزنند.

پاسخ‌ها:

۱ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در پاسخ‌ها نمادهای **راه I**، **راه II** و ... را داریم که نشان‌دهنده روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه I** متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

۲ توصیه ما برای استفاده از پاسخ‌نامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰ تا).

ب درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخ‌نامه کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید.

ت بروید سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از این‌ها که این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همه پاسخ‌ها بیندازید. بررسی **راه I**، **راه II**، **نکته** ها و

تذکره ها باعث می‌شود به همه نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

و حرف آخر هم این‌که:

- اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم.
- وقتی پای کتاب گسسته وسط باشد، اول از همه باید از برادران نصری که زمینه اولین همکاری مشترک ما را سال‌ها قبل در کتاب جامع گسسته فراهم کردند، تشکر ویژه داشته باشیم.
- تشکر فراوان از آقایان مهندس مصطفی کرمی، مهندس محمدحسین رحیمی و جناب مصطفی دیداری که این کتاب غنای ایده‌ها و تست‌هایش را مرهون سواد فوق‌العاده و زحمت این بزرگواران است.
- از مهندس نوید شاهی بزرگوار که در تمام مراحل کتاب با وسواس و دقت بی‌نظیرشان همراه ما بودند تشکر می‌کنیم.
- از محسن فراهانی دوست‌داشتنی بابت نظرات مفید و بهبود کیفیت کتاب متشکریم.
- از تمامی دوستان و همکارانمان در انتشارات خیلی‌سبز، خصوصاً سرکار خانم هدی ملک‌پور که زحمت پیگیری تمام امور این کتاب را داشتند، تشکر می‌کنیم.

فهرست

تست

درس نامه

۵۶	۸	درس اول: روش های استدلال
۶۰	۱۵	درس دوم: عادکردن
۶۳	۲۳	درس سوم: ب.م.م و ک.م.م
۶۶	۲۹	درس چهارم: قضیه تقسیم
۶۹	۳۵	درس پنجم: اعداد اول
۷۱	۳۷	درس ششم: همنهشتی
۷۴	۴۴	درس هفتم: ویژگی تقسیم و معادله همنهشتی
۷۷	۴۷	درس هشتم: کاربردهای همنهشتی
۸۴		آزمون:
۸۴		سری Z:

فصل اول نظریه اعداد

۱۲۳	۸۷	درس اول: آشنایی با گراف
۱۳۲	۱۰۳	درس دوم: مسیر و دورگراف
۱۳۹	۱۱۴	درس سوم: مدل سازی با گراف
۱۴۹		آزمون:
۱۵۰		سری Z:

فصل دوم گراف و مدل سازی

۱۹۱	۱۵۲	درس اول: اصول اولیه شمارش
۱۹۳	۱۵۵	درس دوم: جایگشت
۱۹۶	۱۶۰	درس سوم: ترکیب
۱۹۹	۱۶۵	درس چهارم: جایگشت با تکرار
۲۰۱	۱۶۷	درس پنجم: معادله سیاله خطی با ضریب واحد
۲۰۳	۱۷۲	درس ششم: مربع لاتین
۲۰۹	۱۷۸	درس هفتم: اصل شمول و عدم شمول
۲۱۱	۱۸۳	درس هشتم: تابع شماری
۲۱۳	۱۸۶	درس نهم: اصل لانه کبوتری
۲۱۶		آزمون:
۲۱۷		سری Z:

فصل سوم ترکیبیات

۲۱۸

۳۳۳

پاسخ نامه تشریحی
پاسخ نامه کلیدی

درس دوم عادکردن



اگر عدد صحیح b بر عدد صحیح و غیر صفر a بخش پذیر باشد، می نویسیم $a \mid b$ و می خوانیم (a ، b را عاد می کند).
 وقتی b بر a بخش پذیر است، در تقسیم b بر a باقی مانده صفر می شود:
 و در واقع b مضرب صحیحی از a است. می نویسیم: $b = aq$
 پس عبارت های زیر معادل اند:

a مضرب صحیح a است.	b بر a بخش پذیر است.	$a \mid b$	$\exists q \in \mathbb{Z}$ $b = aq$	a ، b را عاد می کند. a ، b را می شمارد.	a مقسوم علیه b است. a عامل b است. a شمارنده b است.
------------------------	--------------------------	------------	--	--	--

مثلاً $12 \mid -2$ یعنی 12 بر -2 بخش پذیر است (درست است، 12 دقیقاً (-6) برابر (-2) است).
 $3 \mid 10$ یعنی 10 بر 3 بخش پذیر است (خب غلط است، 10 مضرب 3 نیست).

مثال مقدار عدد صحیح x را در هر یک از روابط زیر پیدا کنید:

الف $x \mid -7$

ب $2x - 1 \mid 20$

پ $-3 \mid x$ و $x \mid 24$

ت $3^x \mid 27^3$

پاسخ الف -7 بر x بخش پذیر است، x می تواند ± 1 یا ± 7 باشد و 4 جواب صحیح دارد.

ب 20 بر $2x - 1$ بخش پذیر است، می دانیم $2x - 1$ فرد است، پس باید ± 1 و ± 5 باشد و داریم:
 $2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1, 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$
 $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3, 2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

یعنی x می تواند صفر، 1 ، -2 یا 3 باشد.

پ x بر -3 بخش پذیر است و 24 به x می خورد؛ پس x مقسوم علیه 24 است که به 3 بخورد. پس ± 3 ، ± 6 ، ± 12 ، ± 24 خوب هستند.

ت $3^9 = (3^3)^3 = 27^3$. حالا $3^x \mid 27^3$ وقتی برقرار است که $1 \leq x \leq 9$ ، چون 3^x بر 3^9 بخش پذیر است، پس توان سمت چپ (x) باید کمتر یا مساوی 9 باشد.

تذکره $a^n \mid a^m \Leftrightarrow n \leq m$ (البته پایه های 0 ، 1 و -1 را بگذارید کنار یعنی $a \neq 0, 1, -1$).

آزمون اگر $x - 2 \mid 6$ ، آن گاه کمترین عدد طبیعی سه رقمی x کدام است؟

پاسخ باید $x - 2$ مضرب 6 باشد، پس داریم:

$x - 2 = 6k \Rightarrow x = 6k + 2$

و با دقت به این که $96 = 6 \times 16$ است، حداقل عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k = 17$ به دست می آید که برابر $104 = 6 \times 17 + 2$ است.

ویژگی های عادکردن (۱)

در جدول زیر ابتدایی ترین ویژگی های عادکردن را به همراه توضیح و مثال ببینید:

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$\forall a \in \mathbb{Z}; a \mid a$	هر عدد صحیح بر خودش بخش پذیر است. (یواشکی اجازه می دهیم صفر بر صفر بخش پذیر باشد).	همواره داریم: $1 \mid x - 1, x - 1 \mid 7, 7 \mid 7$
$\forall a \in \mathbb{Z}; \pm 1 \mid a$	هر عدد صحیح بر ± 1 بخش پذیر است. (± 1 همه اعداد را عاد می کنند).	همواره $1 \mid 2x - 1$ یا $\pm 1 \mid n + 5$

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$\forall a \in \mathbb{Z}; a 0$	صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است. (همه اعداد صفر را عاد می کنند.)	اگر رابطه $a n - 3$ همواره برقرار باشد $n = 3$ است.
اگر $a 1$ یا $a 1$ ، آن گاه $a = \pm 1$	عدد ۱ یا -۱ فقط بر ± 1 بخش پذیر است.	اگر $2x - 3 1$ ، آن گاه $2x - 3 = \pm 1$ و داریم: $x = 1$ یا $x = 2$
$a b \Rightarrow \pm a \pm b$	علامت در بخش پذیری اثر ندارد.	از $14 a$ نتیجه می شود: $14 -a$ و $-14 a$
اگر $a b$ ، آن گاه $a kb$ ($k \in \mathbb{Z}$)	اگر b بر a بخش پذیر باشد، هر مضرب b نیز بر a بخش پذیر است.	از رابطه $a b$ نتیجه می گیریم: $a 7b$ یا $a -3b$
اگر $a b$ ، آن گاه $a b^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	سمت راست را می توانیم به توان دلخواه n برسانیم.	از رابطه $3 b$ نتیجه می شود: $3 b^2$ از رابطه $x 4$ نتیجه می شود: $x 4^3$
اگر $a b$ ، آن گاه $ka kb$ و برعکس ($k \neq 0$)	قراردادن یا حذف ضریب غیر صفر برای دو طرف مجاز است.	از رابطه $5 x$ نتیجه می شود: $15 3x$ (ضرب در ۳) از رابطه $30 16a$ نتیجه می شود: $15b 8a$ (تقسیم بر ۲)
اگر $a b$ ، آن گاه $a^n b^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	می توانیم برای دو طرف توان n قرار دهیم یا توان n را بزنیم.	از رابطه $a b^2$ نتیجه می شود: $a^3 b^6$ (به توان ۳) از رابطه $4x^2 y^4$ نتیجه می شود: $2x y^2$ (توان ۲ را زدیم)
اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، آن گاه $ a \leq b $	اگر عدد غیر صفر b بر a بخش پذیر باشد، قدر مطلق b از a کم تر نیست.	از رابطه $2 + n^2 2 + n^3$ نتیجه می گیریم: $ n^3 + 2 \leq n^2 + 2 $
اگر $a b$ و $b a$ ، آن گاه $ a = b $	فقط زمانی که دو عدد یا با هم برابر باشند یا قرینه هم باشند هر کدام دیگری را عاد می کند.	$n^2 n + 1$ و $n + 1 n^2$ نتیجه می گیریم: $ n + 1 = n^2 $
$ab c \Rightarrow a c, b c$	به جای سمت چپ می توانیم مقسوم علیه های آن را قرار دهیم (لاغر کنیم).	از رابطه $6 x$ نتیجه می شود $2 x$ و $3 x$. از رابطه $a^2 x$ نتیجه می شود $a x$.

تذکره هنوز چندتا ویژگی مانده که جلوتر خواهیم خواند.

مثال x را در هر یک از روابط زیر بیابید.

الف) $2x^2 - x - 1 = 0$ ب) $\forall x \in \mathbb{Z}; 2x - 1 | n$ پ) $\forall n \in \mathbb{Z}; n | x^2 + 2x$ ت) $2x + 1 | 3x + 4, 3x + 4 | 2x + 1$

پاسخ الف) $2x^2 - x - 1 = 0$ باید صفر باشد، چون فقط صفر در رابطه $k | 0$ صدق می کند. پس $2x^2 - x - 1 = 0$ و در نتیجه: $\frac{-1}{2}$ یا $x = 1$

ب) چون هر n بر $2x - 1$ بخش پذیر شده پس $2x - 1$ باید ± 1 باشد و داریم:
 $2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$
 $2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

پس مقدار x حتماً صفر یا ۱ است.

پ) چون $x^2 + 2x$ بر هر عدد صحیح n بخش پذیر شده است، پس $x^2 + 2x$ صفر است:
 $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0$
و بنابراین $x = 0$ یا $x = -2$.

ت) $3x + 4$ و $2x + 1$ بر هم بخش پذیرند؛ پس باید مساوی یا قرینه هم باشند:
 $3x + 4 = 2x + 1 \Rightarrow x = -3$
 $3x + 4 = -2x - 1 \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$

پس x باید -1 یا -3 باشد.

آزمون اگر $a | 20$ ، کدام نتیجه درست نیست؟

الف) $a | 60$ ب) $a | 400$ ج) $20 - a \geq 0$ د) $a | 10$

پاسخ ۲۰ بر a بخش پذیر است؛ پس اولاً $20 \leq |a|$ و ثانیاً هر مضرب ۲۰ و هر توان ۲۰ به a می خورد. پس گزینه های ۱، ۲ و ۳ درست هستند و ۴ لزومی ندارد درست باشد. مثلاً $20 | 20$ اما $10 \nmid 20$.

تست ۱ چند عدد صحیح n وجود دارد که هر سه رابطه $n^3 - 16n$ ، -1 ، $n^3 - 16n$ و $n^3 - 16n$ برقرار باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

پاسخ ۳ همه اعداد مثل $n^3 - 16n$ بر ± 1 بخش پذیرند یا ± 1 همه اعداد را عاد می کنند؛ پس اولی همواره درست است. همه اعداد، صفر را عاد می کنند
($a \mid 0$ چون $0 = a \times 0$) پس دومی هم همواره درست است. دو رابطه اول به ازای هر عدد صحیح درست هستند، اما صفر فقط خودش را عاد می کند، چون داریم:
 $0 \mid a \Rightarrow 0 = 0 \times (هر چیزی) \Rightarrow a = 0$

پس از رابطه $n^3 - 16n$ نتیجه می گیریم:
پس سه عدد صحیح وجود دارد.

$$n^3 - 16n = 0 \Rightarrow n(n^2 - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 4 \\ n = -4 \end{cases}$$

بزرگ و کوچک کردن دو طرف • از کنار هم گذاشتن چند تا از ویژگی های بالا می توانیم این جوری بگوییم که: از رابطه $a \mid b$ ، نتیجه می گیریم:

الف هر مضرب b نیز بر a بخش پذیر است.

ب b بر هر مقسوم علیه a بخش پذیر است.

پس اجازه داریم b را با ضرب کردن یا توان رساندن «بزرگ تر» و a را با تقسیم کردن یا برداشتن توان «کوچک تر» کنیم.

مثلاً از $x \mid 12$ نتیجه می شود: $12 \mid 5x$ ، $12 \mid x^3$ ، $6 \mid x$ و $3 \mid x$ و همچنین $\frac{2x^3}{x}$ یا $\frac{4}{12}$ بزرگ کردیم. کوچک کردیم.

بدیهی است که عکس این کار درست نیست مثلاً از $4 \mid 12$ نمی شود نتیجه گرفت که $8 \mid 6$. البته یادمان نرود که همیشه اجازه داریم هر دو طرف را با ضرب و توان، به یک اندازه بزرگ یا کوچک کنیم.

مثال ۱ اگر $a \mid b$ ، کدام روابط درست هستند؟

- الف $2a \mid b$ ب $a \mid 2b$ پ $-3a \mid 3b$ ت $a^2 \mid b$
ث $a \mid b^3$ ج $a^2 \mid -b^2$ چ $|a| \leq |b|$ ح $2a^2 \mid -6b^3$

پاسخ ۱ الف و ت نادرست هستند، چون اجازه نداریم طرف چپ را با ضرب و توان بزرگ تر کنیم. مثلاً $2 \mid 6$ درست است اما $2 \times 2 \mid 6$ و $6 \mid 2^2$ نادرست هستند.

دقیقاً به همین دلیل، ب و ث درست هستند، چون اجازه داریم طرف راست را با ضرب یا توان چاق تر کنیم.
در پ و ج هر دو طرف را به یک اندازه بزرگ کردیم (ضربها و توانها برابرند) و رابطه درست است. دقت کنید که علامت در بخش پذیری اثری ندارد. پس در حالت کلی از رابطه $a \mid b$ می توانیم بنویسیم $\pm a^n \mid \pm b^n$ و $\pm ka \mid \pm kb$.

ج به خاطر این که $b \neq 0$ را نیاورده، نادرست است. اگر $b = 0$ باشد، $|a| \leq |b|$ لزوماً درست نیست. مثلاً $3 \mid 0$ اما $3 \leq 3$ نیست.

ح درست است. روند به دست آوردن (ح) را ببینید:

$$a \mid b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid b^2 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} 2a^2 \mid 2b^2 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرف راست در } -3b} 2a^2 \mid -6b^3$$

تست ۲ از رابطه $x \mid 14$ کدام نتیجه نادرست است؟ ($x \neq 0$)

- (۱) $14 \mid x^2$ (۲) $14 \mid 5x$ (۳) $28 \mid -2x$ (۴) $15 \mid x+1$

گزینه ۴ سه گزینه اول درست هستند.

در ۱ می گوییم x بر 14 بخش پذیر است؛ پس هر توان x هم بر 14 بخش پذیر است؛ یعنی $x^2 \mid 14$.

در ۲ چون x به 14 می خورد، هر مضرب x هم به 14 می خورد و نتیجه $14 \mid 5x$ درست است.

در ۳ x مضرب 14 است؛ پس $2x$ مضرب 28 است (دو طرف را ۲ برابر کردیم) و بنابراین $-2x$ هم مضرب 28 است.

اما ۴ نادرست است. از بخش پذیری x بر 14 نمی شود نتیجه گرفت $x+1$ به 15 می خورد. (با $x = 28$ به راحتی نقض می شود).

تذکره ۱ در حالت کلی $a \mid b$ نمی شود نتیجه گرفت $a+c \mid b+c$.

تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد

اگر عدد N کوچک باشد، می‌توانیم مقسوم‌علیه‌ها را بگوییم و بشماریم. مثلاً ۱۴ دارای ۴ مقسوم‌علیه طبیعی است: ۱، ۲، ۷، ۱۴ و هشت مقسوم‌علیه صحیح دارد: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$.

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح همیشه دو برابر تعداد مقسوم‌علیه طبیعی است اما برای اعداد بزرگ‌تر، روشی وجود دارد که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی را سریع حساب کنیم:

مرحله ۱ عدد را تجزیه کنید.

مرحله ۲ به توان‌های تجزیه یک واحد اضافه کنید.

مرحله ۳ در هم ضرب کنید.

مثلاً تجزیه عدد ۶۰ به صورت $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ است؛ پس $(1+1)(1+1)(2+1)$ یعنی ۱۲ مقسوم‌علیه طبیعی دارد. منطق این روش را هم اگر بدانیم بد نیست: در هر مقسوم‌علیه ۶۰، توان ۲ می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ باشد، توان ۳ و ۵ هم صفر یا ۱ است. پس قیافه مقسوم‌علیه ۶۰ به صورت $5^0 \times 3^0 \times 2^0$ یا $5^0 \times 3^1 \times 2^1$ یا $5^1 \times 3^0 \times 2^0$ یا $5^1 \times 3^1 \times 2^1$ است.

به زبان ریاضی: اگر تجزیه N به صورت $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ باشد، N دارای $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ مقسوم‌علیه طبیعی است.

هر یک از اعداد زیر چند مقسوم‌علیه مثبت دارند؟ (P عدد اول دورقمی است.)

الف ۴۸

ب ۴۹

پ ۵۱

ت $8P^2$

تجزیه اعداد به ترتیب $2^4 \times 3^1$ و 7^2 و $3^1 \times 17^1$ و $2^3 \times P^2$ است. پس به ترتیب 5×2 و 3 و 2×2 و 4×3 مقسوم‌علیه مثبت دارند.

تعداد مقسوم‌علیه‌های خاص

در بعضی سؤال‌ها، تعداد مقسوم‌علیه‌های خاصی را می‌خواهیم مثلاً تعداد مقسوم‌علیه‌هایی که مضرب ۳ باشند، فرد باشند و ... دوتا روش حل داریم:

۱ اگر بتوانیم خواسته سؤال را به زبان عادی کردن می‌نویسیم. مثلاً وقتی دنبال مقسوم‌علیه‌های زوج عدد 500 هستیم $500 \mid 2x$ بعد دو طرف را به ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم: $250 \mid x$

و تعداد مقسوم‌علیه‌های 250 را پیدا می‌کنیم (چون $250 = 2^1 \times 5^3$ جواب می‌شود 2×4 یعنی ۸).

مثال عدد ۳۰۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد که:

الف مضرب ۴ باشند.

ب مضرب ۲۵ باشند.

می‌نویسیم $300 \mid 4x$ پس $75 \mid x$ و x می‌تواند هر مقسوم‌علیه ۷۵ باشد، چون $75 = 3^1 \times 5^2$ به تعداد $2 \times 3 = 6$ جواب داریم.

$$12 = 2^2 \times 3^1 \Rightarrow 3 \times 2 = 6$$

۲ می‌توانیم خواسته سؤال را در تجزیه مقسوم‌علیه‌ها بیاوریم. مثلاً گفتیم قیافه مقسوم‌علیه‌های عدد ۶۰ به صورت $5^0 \times 3^0 \times 2^0$ یا $5^0 \times 3^1 \times 2^1$ یا $5^1 \times 3^0 \times 2^0$ یا $5^1 \times 3^1 \times 2^1$ است. حالا اگر سؤال مقسوم‌علیه مضرب ۳ بخواهد، باید توان ۳ حتماً ۱ باشد؛ یعنی $5^0 \times 3^1 \times 2^0$ یا $5^1 \times 3^1 \times 2^0$ و 3×2 حالت داریم.

مثال عدد $2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ چند مقسوم‌علیه صحیح دارد که:

الف فرد و مضرب ۷ باشند؟ ب مضرب ۳ باشند اما مضرب ۵ نباشند؟ پ مضرب ۱۲ باشند اما مضرب ۷ نباشند؟

پاسخ تیپ مقسوم‌علیه‌های این عدد به صورت $2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^0 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^0 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1$ یا $2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^2 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2$ یا $2^0 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^2$ یا $2^1 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^2$ یا $2^2 \times 3^0 \times 5^2 \times 7^2$ یا $2^0 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^2$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^2$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^2$ است.

در الف مقسوم‌علیه فرد و مضرب ۷ حتماً باید ۲ و ۷ را داشته باشد یعنی $2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ است و $3 \times 2 = 6$ حالت دارد و چون سؤال گفته صحیح، هم + و هم - قبول است یعنی جواب می‌شود ۱۲.

در ب مقسوم‌علیه مضرب ۳ که مضرب ۵ نیست حتماً $2^2 \times 3^1$ را دارد و ۵ را هم دارد؛ پس می‌شود $2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ و $4 \times 2 \times 2 = 16$ حالت داریم که چون صحیح است جواب می‌شود ۳۲ تا.

در پ مقسوم‌علیه مضرب ۱۲ و غیر مضرب ۷، باید $2^2 \times 3^1$ را داشته باشد و ۷ داشته باشد؛ پس تجزیه‌اش $2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ یا $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ است پس تعداد حالت‌ها ۸ تا $2 \times 2 \times 2$ است و در اعداد صحیح ۱۶ حالت دارد.

تست ۱ عدد ۴۵۰۰ چند مقسوم علیه مثبت دارد که مضرب زوج ۹ باشد؟

- ۱۴ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

پاسخ ۱ را مقسوم علیه ۴۵۰۰ می گیریم؛ یعنی ۴۵۰۰ بر آن بخش پذیر است یا $4500 \mid a$. از طرفی a ، مضرب ۹ است؛ یعنی $a = 9k$ است و چون مضرب

زوج ۹ است؛ یعنی $a = 9(2k) = 18k$ ؛ پس $4500 \mid 18k$. پس می توانیم دو طرف را به ۱۸ ساده کنیم: $k \mid 250$.

پس k باید مقسوم علیه ۲۵۰ باشد؛ یعنی:

$$k = 1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250$$

به ازای هر k دقیقاً یک a به دست می آید؛ پس a ، ۸ مقدار می تواند داشته باشد.

ویژگی های عادکردن (۲)

این ویژگی ها کمی پیشرفته تر هستند و در حل تست ها هم بیشتر دیده می شوند:

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (قانون تعدی)	اگر اولی دومی را عاد کند و دومی هم سومی را عاد کند اولی، سومی را عاد می کند.	- از $6 \mid n$ و $n \mid 15$ نتیجه می گیریم: $6 \mid 15$ (چون $3 \mid 15$) - از $x \mid 15$ نتیجه می شود: $3 \mid x$ (چون $3 \mid 15$) - از $10 \mid a$ نتیجه می گیریم: $40 \mid a$ (چون $40 \mid 10$)
اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آن گاه $a \mid mb + nc$ (قانون ترکیب خطی)	سمت چپ را ثابت نگه می داریم و سمت راست ها را در هر عدد دلخواه صحیح ضرب و بعد آن ها را جمع کنیم.	- از $a \mid b$ و $a \mid c$ نتیجه می گیریم: $a \mid 7a - 5b$ - از $1 \mid 2x - 1$ و $3 \mid 3x + 1$ نتیجه می گیریم: $n \mid 5(2x - 1) + 4(3x + 1)$
اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ ، آن گاه $ac \mid bd$	دو طرف رابطه عادکردن را می توان ضرب کرد.	- از $2 \mid x$ و $3 \mid y$ نتیجه می گیریم: $6 \mid xy$ - از روابط $4 \mid m$ و $5 \mid n$ نتیجه می شود: $20 \mid mn$
اگر $a \mid bc$ و دو عدد a و b عامل مشترک ندارند، آن گاه: $a \mid c$	اگر ضرب b و c به a می خورد اما b با a هیچی مشترک نداشته باشد، حتماً c به a می خورد.	- از $5 \mid 7x$ نتیجه می شود: $5 \mid x$ - از $11(n - 1) \mid 27$ نتیجه می گیریم: $27 \mid n - 1$

تست ۲ از رابطه های $a \mid b$ و $a \mid c$ کدام نتیجه درست نیست؟

- ۱) $a^2 \mid 3bc$ ۲) $a^2 \mid b^2 - c^2$ ۳) $a \mid a - 2bc$ ۴) $a^2 \mid bc$

پاسخ ۲ دیدیم که می توانیم دو رابطه عادکردن را در هم ضرب کنیم؛ پس از روابط $a \mid b$ و $a \mid c$ نتیجه می شود $a^2 \mid b \times c$ و با توجه به قانون ضرب

در طرف راست، می توان گفت $a^2 \mid 3bc$ و ۱) درست است اما ۲) تأیید نمی شود. چون ما به a^2 رسیدیم نه a^3 و بزرگ کردن طرف چپ درست نیست.

مثال نقض: از $2 \mid 14$ و $2 \mid 10$ نتیجه نمی شود $2^3 \mid 14 \times 10$ پس جواب ۲) است.

دلیل درستی ۲) و ۳) را هم ببینید:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid c \\ a \mid a \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a \mid mc + na \xrightarrow[n=5]{m=-2b} a \mid -2bc + 5a$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid b^2 \\ a \mid c \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid c^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a^2 \mid mb^2 + nc^2 \xrightarrow[n=-c]{m=1} a^2 \mid b^2 - c^2$$

تست ۳ از برقراری دو رابطه $a^2 \mid b$ و $b \mid n^2 + n$ ، کدام نتیجه گیری ممکن است نادرست باشد؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- ۱) $a^2 \mid n+1$ ۲) $a^2 \mid n+1$ ۳) $a \mid n+1$ ۴) $a \mid n^2 + 2n + 1$

پاسخ ۳ طبق قانون تعدی داریم: $na^2 \mid b, b \mid n^2 + n \xrightarrow{\text{قانون تعدی}} na^2 \mid n^2 + n \xrightarrow[n \neq 0]{\div n} a^2 \mid n+1$ ۲)

به جای a^2 می توانیم مقسوم علیه های آن (مثل a) را قرار دهیم؛ پس $a \mid n+1$ ۳)

سمت راست را می توانیم به توان دلخواه طبیعی (مثل ۲) برسانیم؛ پس:

$$a \mid n+1 \Rightarrow a \mid (n+1)^2 \Rightarrow a \mid n^2 + 2n + 1 \quad ۴)$$

چراکه نمی توانیم طرف چپ را بزرگ تر کنیم، البته می شود مثال نقض هم زد: $b = 12, n = 3, a = 2$!

• استفاده از ترکیب خطی در مسائل پارامتری

فرض کنید که $\alpha \mid 2n-1$ و $\alpha \mid 3n+1$ ، برای پیدا کردن α باید n را از بین ببریم. با استفاده از ترکیب خطی می‌نویسیم $\alpha \mid x(3n+1) + y(2n-1)$ و برای x و y اعدادی را انتخاب می‌کنیم که n حذف شود. این‌طوری:

پس $\alpha \mid 5$ و در نتیجه α می‌تواند ± 1 یا ± 5 باشد. (می‌توانستیم این‌شکلی هم بگوییم که $3n+1$ را در 2 و $2n-1$ را در 3 ضرب می‌کنیم و بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.)

مثلاً اگر رابطه‌ای به شکل $2n+1 \mid n-3$ داشته باشیم، خودمان می‌نویسیم $n-3 \mid n-3$ و بعد با کمک ترکیب خطی، n را از طرف راست حذف می‌کنیم. ببینید:

$$n-3 \mid x(n-3) + y(2n+1) \xrightarrow[y=1]{x=-2} n-3 \mid 7 \Rightarrow n-3 = \pm 1, \pm 7 \Rightarrow n = 1 \text{ یا } -4 \text{ یا } 2 \text{ یا } 4$$

آزمون دو عدد n^2+1 و $2n^2+6n+3$ به ازای برخی از مقادیر n بر k بخش‌پذیرند. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار k کدام است؟

۱۰ (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱ (۴)

پاسخ دو عبارت داده‌شده بر k بخش‌پذیرند (k آن‌ها را عاد می‌کند)؛ پس از ویژگی ترکیب خطی داریم:

$$\begin{cases} k \mid n^2+1 \\ k \mid 2n^2+6n+3 \end{cases} \Rightarrow k \mid 2n^2+6n+3 - 2(n^2+1) = 6n+1$$

(سمت راست پایینی را منهای دو برابر سمت راست بالایی می‌کنیم.)

$$\begin{cases} k \mid 6n+1 \xrightarrow{\times n} k \mid 6n^2+n \\ k \mid 2n^2+6n+3 \xrightarrow{\times 6} k \mid 12n^2+36n+18 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} k \mid n-6$$

دوباره:

$$\begin{cases} k \mid n-6 \xrightarrow{\times 6} k \mid 6n-36 \\ k \mid 6n+1 \end{cases}$$

دوباره داریم:

با کم کردن سمت راست دو رابطه $k \mid -36-1 = -37$.

k مقسوم‌علیه 37 است؛ پس بزرگ‌ترین مقدار k ، برابر 37 است که مجموع ارقام آن برابر 10 است.

• استفاده از ریشه در رابطه $f(n) \mid n-k$

• اگر در طرف چپ عبارت درجه اول باشد، می‌توانیم ریشه آن را محاسبه کنیم و در طرف راست قرار دهیم.

مثلاً در همین رابطه $2n+1 \mid n-3$ ، ریشه سمت چپ $n=3$ است و با قراردادن آن در سمت راست داریم:

$$n-3 \mid \underbrace{2 \times 3 + 1}_7$$

و کار تمام می‌شود.

مثال n را از روابط زیر بیابید.

$$n+2 \mid n^2-3 \quad \text{ب}$$

$$n-1 \mid n^2+2n+5 \quad \text{الف}$$

$$n-1 \mid 8$$

پاسخ الف ریشه سمت چپ $n=1$ است و در سمت راست قرار می‌دهیم و داریم:

پس $n-1$ می‌تواند $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ باشد.

$$n+2 \mid 1$$

ب ریشه سمت چپ $n=-2$ است و با قراردادن آن در طرف راست داریم:

$$n+2 = \pm 1$$

پس:

آزمون چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $y = x + \frac{2x-1}{x-2}$ وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ باید x و y صحیح باشند، پس باید $3x-1 \mid x-2$ و داریم:

$$\xrightarrow{\text{ریشه سمت چپ ۲ است}} x-2 \mid 3(2)-1=5 \Rightarrow x-2 = \pm 1, \pm 5 \Rightarrow x = 3, 1, 7, -3$$

پس ۴ نقطه با مختصات صحیح داریم.

به مختصات این نقطه‌ها دقت کنید:

$$\underbrace{(-3, -3 + \frac{-1}{-5})}_{-1}, \underbrace{(3, 3 + \frac{1}{1})}_{11}, \underbrace{(7, 7 + \frac{1}{5})}_{11}, \underbrace{(1, 1 + \frac{-1}{-1})}_{-1}$$

• اگر ریشه غیر صحیح باشد

اگر ریشه سمت چپ غیر صحیح باشد، باز هم می‌توانیم آن را در سمت راست قرار دهیم. ببینید:

۲ کسر را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

۱ ریشه را قرار می‌دهیم.

۴ جواب‌های به دست آمده را در رابطه اولیه امتحان می‌کنیم.

۳ صورت کسر را می‌گیریم.



$$2n+1=0$$

مثلاً برای به دست آوردن n های صحیح که $n^2-1 \mid 2n+1$ داریم:

$$2n+1 \mid 3 \begin{cases} 2n+1=\pm 1 \Rightarrow n=0, n=-1 \\ 2n+1=\pm 3 \Rightarrow n=1, n=-2 \end{cases}$$

پس $n=-\frac{1}{2}$ را در راست قرار می دهیم: $2n+1 \mid (-\frac{1}{2})^2-1 = -\frac{3}{4}$. کسر نیازی به ساده کردن ندارد، پس:

صبر کنید کار تمام نشده است. جواب ها باید کنترل شوند:

$$n=0 \Rightarrow 2(0)+1 \mid 0^2-1 \checkmark$$

$$n=-1 \Rightarrow 2(-1)+1 \mid (-1)^2-1 \checkmark$$

$$n=1 \Rightarrow 2(1)+1 \mid 1^2-1 \checkmark$$

$$n=-2 \Rightarrow 2(-2)+1 \mid (-2)^2-1 \checkmark$$

پس هر ۴ تا قبول هستند. (ولی همیشه این جور نیست.)

• **یک تیپ ویژه** • فرض کنید می دانیم $7 \mid 3k-2$ و می خواهیم این رابطه را به صورت $49 \mid \dots$ درآوریم. دو راه به نظر می رسد:

(الف) به توان ۲ برسانیم، $7^2 \mid (3k-2)^2$ یعنی $49 \mid 9k^2-12k+4$.

(ب) در ۷ ضرب کنیم، $7(3k-2) \mid 7 \times 7$ پس $49 \mid 21k-14$.

$$49 \mid 9k^2+9k-10$$

و مثلاً از جمع این ها داریم:

$$49 \mid 9k^2+9k+39$$

حالا چون $49 \mid 49$ ، می توان نوشت:

به نتیجه نگاه کنید ... عبارت $9k^2+9k+39$ خیلی هم شبیه $3k-2$ نیست. چون کتاب درسی یک تمرین از این مدل دارد، بد نیست در ذهن بسپارید که با استفاده از روابط $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$ ، $a \mid b \Rightarrow ka \mid kb$ ، و $a \mid b \Rightarrow a \mid b+d$ می توانیم از روی یک رابطه عادی کردن، روابط جدید و عجیبی بسازیم.

مثال ۱ از رابطه $5 \mid 3k+1$ کدام نتایج درست هستند؟

(الف) $25 \mid 9k^2+6k+5$ (ب) $25 \mid 9k^2+21k+6$ (پ) $5 \mid 12k^2+7k+1$

پاسخ (الف) اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم: $25 \mid 9k^2+6k+1$ ، راستی می شود فقط طرف راست را به توان ۲ برسانیم: $5 \mid 9k^2+6k+1$ و اگر

$$25 \mid 15k+5$$

در ۵ ضرب کنیم:

$$5 \mid 3k^2+k$$

و اگر طرف راست را k برابر کنیم:

(ب) حالا رابطه از جمع طرف های راست به صورت $25 \mid 9k^2+6k+1+15k+5$ به دست می آید.

(الف) برای رابطه هم داریم $25 \mid 50$ و بنابراین $25 \mid 9k^2+6k+1+50$.

$$5 \mid 9k^2+6k+1+3k^2+k$$

(پ) در مورد رابطه هم می توان گفت:

پس هر سه رابطه درست هستند.

آزمون اگر $5k+1 \mid 7$ ، آن گاه عدد $60k^2+42k+6$ همواره بر کدام عدد بخش پذیر است؟

(۱) ۴۲ (۲) ۲۸ (۳) ۲۱ (۴) ۷۰

پاسخ (الف) از $5k+1 \mid 7$ باید به این عدد برسیم:

$$(5k+1)^2 = 25k^2+10k+1 \quad (\text{سمت راست به توان ۲})$$

$$k(5k+1) = 5k^2+k \quad (\text{سمت راست را می شود در } k \text{ ضرب کرد.})$$

$$2(5k+1) = 10k+2$$

$$7 \mid 30k^2+21k+3 \xrightarrow{\times 2} 14 \mid 60k^2+42k+6$$

حالا از جمع این ها داریم: $7 \mid 30k^2+21k+3$ و دو طرف را در ۲ ضرب می کنیم:

حالا دقت کنید که طرف راست، مضرب ۳ هم هست، پس این عدد بر 14×3 یعنی ۴۲ بخش پذیر است.

$$\text{مضرب } 7 \quad 6(5k+1)(2k+1) = 42$$

(الف) اگر $60k^2+42k+6$ را تجزیه کنیم، داریم:

تذکره موافقت که در این تست عددگذاری راه خوبی نیست؟

بخش پذیری در حضور اعداد اول

حتماً یادتان هست که عدد اول، عددی طبیعی و بیشتر از یک است که فقط بر خودش و ۱ بخش پذیر است؛ مثلاً ۲، ۳، ۵، ۷ و ... اعداد اول هستند. اگر P اول باشد چند نتیجه مهم در عادی کردن می توانیم بگیریم.

(الف) از رابطه $a \mid P$ نتیجه می شود $a = \pm 1$ یا $a = \pm P$ (مثلاً از $7 \mid a$ نتیجه می گیریم $a = \pm 7$ یا $a = \pm 1$).

(ب) از رابطه $a^n \mid P$ مطمئن هستیم $a \mid P$. (مثلاً از $3 \mid a^4$ نتیجه می گیریم $3 \mid a$).

(پ) از رابطه $ab \mid P$ می توان نتیجه گرفت $a \mid P$ یا $b \mid P$. (اگر $7 \mid ab$ ، حتماً $7 \mid a$ یا $7 \mid b$).

مسئله P عددی اول و فرد است. چند عدد صحیح x در رابطه $x \mid 4p$ صدق می‌کنند؟

پاسخ چون p عدد اول است کارمان خیلی ساده است، اگر در ذهنتان سعی کنید $4p$ را به صورت ضرب دوتا عدد بنویسید، متوجه می‌شوید که $4p$ بر $1, 2, 4, p, 2p, 4p$ و قرینه آن‌ها بخش‌پذیر است، پس برای عدد صحیح x ، 12 جواب داریم.

آزمون دو رابطه $a \mid 7n-1$ و $a \mid kn+3$ برقرار هستند. به ازای کدام k فقط دو مقدار مثبت برای a به دست می‌آید؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

پاسخ کاری می‌کنیم تا n از بین برود:

$$\begin{aligned} a \mid 7n-1 &\xrightarrow{\times k} a \mid 7kn-k \\ a \mid kn+3 &\xrightarrow{\times 7} a \mid 7kn+21 \end{aligned} \xrightarrow[\text{دو رابطه را کم}]{\text{سمت راست}} a \mid 21-(-k) \Rightarrow a \mid 21+k$$

به زبان قانون ترکیب خطی می‌توانستیم یک‌دفعه هم بنویسیم:

$$a \mid 7(kn+3) - k(7n-1) = 21+k$$

فقط در صورتی که $21+k$ عددی اول باشد، برای a فقط دو مقدار مثبت به دست می‌آید. در بین گزینه‌ها فقط به ازای $k=10$ عدد $21+k=31$ (که اول است) به دست می‌آید.

تذکره درباره اعداد اول و ویژگی‌های آن به صورت کامل و مفصل در درس ۵ صحبت می‌کنیم.

- تغییر توان‌ها در رابطه $a^m \mid b^n$** • اگر از رابطه $a^m \mid b^n$ بخواهیم نتیجه بگیریم $a^r \mid b^s$ ، باید $\frac{n}{m} \leq \frac{s}{r}$ باشد. مثلاً نتیجه‌گیری $a^3 \mid b^2 \Rightarrow a^4 \mid b^3$ نادرست است، چون $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{4}$ بیشتر نیست اما می‌توانیم از $a^2 \mid b$ نتیجه بگیریم $a^4 \mid b^3$ ، چون $\frac{3}{4}$ از $\frac{1}{2}$ بیشتر است. این جوری حفظ کنید:
- $a^m \mid b^n \Rightarrow a^r \mid b^s \Rightarrow sm \geq nr$

یعنی ضرب توان‌های بیرونی از ضرب توان‌های درونی کمتر نشود. مثلاً رابطه زیر درست است چون 4×4 بیشتر از 3×5 است:

$$a^4 \mid b^5 \Rightarrow a^3 \mid b^4$$

بیرونی
درونی

البته اثباتش در حالت عددی خیلی هم سخت نیست مثلاً برای همین مثالی که زدیم داریم:

$$\begin{aligned} a^4 \mid b^5 &\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} (a^4)^3 \mid (b^5)^3 \Rightarrow a^{12} \mid b^{15} \xrightarrow[\text{در یک b ضرب کرد}]{\text{می‌شود سمت راست}} a^{12} \mid b^{16} \\ &\xrightarrow{\text{عکس توان}} a^3 \mid b^4 \xrightarrow{\text{به بیان دیگر}} (a^3)^4 \mid (b^4)^4 \end{aligned}$$

آزمون از رابطه $a^4 \mid b^7$ می‌توان نتیجه گرفت $a^m \mid b^{20}$ حداکثر کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

$$7m \leq 20 \Rightarrow m \leq \frac{20}{7} \Rightarrow m \leq 2$$

پاسخ شرط این بود که $7 \times m$ کوچکتر یا مساوی 20×4 باشد، پس داریم:

اتحادها و بخش‌پذیری

با کمک اتحادهای $a^n \pm b^n$ می‌توانیم نشان دهیم که:

الف $a^n - b^n$ همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $2^{13} - 2^{13} = x^{13} - x^2$ بخش‌پذیر است یا $3^{10} - 7^{10}$ بر 4 بخش‌پذیر است.

در حالت کلی‌تر هم $a^n - b^n$ وقتی n مضرب P باشد، بر $a^P - b^P$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $a^{18} - b^{18}$ بر $a^2 - b^2$ و $a^3 - b^3$ بخش‌پذیر است، اما به $a^4 - b^4$ بخش‌پذیر نیست.

مسئله عدد $2^{30} - 1$ بر چه اعدادی به شکل $2^n - 1$ بخش‌پذیر است؟

پاسخ n باید مقسوم‌علیه 30 باشد، پس $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ و $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^5 - 1, 2^6 - 1, 2^{10} - 1, 2^{15} - 1$ و $2^{30} - 1$ قبول‌اند؛ یعنی $2^{30} - 1$ بر $3, 7, 31, 63, 1023$ و ... بخش‌پذیر است.



ب) $a^n - b^n$ وقتی n زوج باشد بر $a + b$ بخش پذیر است. در حالت کلی تر فقط در صورتی که $\frac{n}{p}$ زوج باشد، $a^n - b^n$ بر $a^p + b^p$ بخش پذیر است. مثلاً $2^{14} - 1^{14}$ بر $2 + 1$ بخش پذیر است، اما بر $2^2 + 1^2$ بخش پذیر نیست. ($\frac{14}{2}$ زوج نیست)

مثال | عدد $3^n - 2^n$ در چه صورت به ۱۳ می خورد؟

پاسخ | ۱۳ همان $2^2 + 3^2$ است، پس باید $\frac{n}{4}$ زوج باشد یعنی n مضرب ۴ باشد.

تست ترکیبی ببینید:

تست | اگر $2^n - 1$ هم بر ۹ و هم بر ۳۱ بخش پذیر باشد، چند جواب دورقمی برای n داریم؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ | باید $2^n - 1$ بر $2^2 + 1$ و نیز $2^n - 1$ بر $2^5 - 1$ بخش پذیر باشد.

پس n مضرب زوج ۳ است ($\frac{n}{3}$ زوج است یعنی n به ۶ می خورد) و n مضرب ۵ است، یعنی n مضرب ۵ و ۶ است و در اعداد دورقمی، 30 ، 60 و 90 مناسباند. (تا ۳)

پ) $a^n + b^n$ وقتی n فرد باشد بر $a + b$ بخش پذیر است و در حالت کلی تر فقط در صورتی که $\frac{n}{p}$ فرد باشد، $a^n + b^n$ بر $a^p + b^p$ بخش پذیر است. مثلاً $3^{20} + 2^{20}$ بر $3 + 2$ بخش پذیر نیست اما بر $3^4 + 2^4$ بخش پذیر است. (چون $\frac{20}{4}$ فرد است).

مثال | از روابط $x^p + y^p \mid x^{50} + y^{50}$ و $x^p + y^p \mid x^{60} - y^{60}$ مقادیر P کدام است؟

پاسخ | باید $\frac{50}{P}$ فرد باشد و $\frac{60}{P}$ زوج؛ پس داریم:

$$\frac{50}{P} \Rightarrow P = 2, 10, 50$$

$$\frac{60}{P} \Rightarrow P = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 30$$

بنابراین فقط $P = 2$ و $P = 10$ مناسب است.

تست | اگر $3^n - 1$ و $28 \mid 5^n + 1$ ، کدام برای n قابل قبول اند؟

۳۰ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ | از $3^n - 1$ نتیجه می گیریم n مضرب زوج ۳ است و از $28 \mid 5^n + 1$ باید n مضرب فرد ۲ باشد، پس n حتماً به صورت $6k$ و مقدار k فرد است. در بین گزینه ها فقط 30 به این ویژگی ها می خورد.

درس دوم: عا د کردن

ویژگی های عا د کردن

۵۹- اگر a و b اعداد صحیح باشند، کدام گزینه می تواند نادرست باشد؟

(۱) $a \mid \pm 1$

(۳) اگر $ab \mid a$ ، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$

۶۰- رابطه $a^2 - 3a + 2 \mid a^2 - 3a + 2$ ، به ازای چند مقدار صحیح a برقرار است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

۶۱- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $18 \mid n$ و $2 \nmid n$ ؟

(۱) ۵

(۲) ۲

۶۲- چند عدد طبیعی $a < 50$ وجود دارد که $5 \mid a$ و $3 \nmid a$ ؟

(۱) ۴

(۲) ۵

۶۳- اگر به ازای هر عدد صحیح n ، رابطه $m^2 - 3m + 1 \mid n$ برقرار باشد، آن گاه m چند حالت مختلف دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) بیش از ۳

۶۴- اگر $ab = cd$ ، کدام نتیجه می تواند نادرست باشد؟

(۱) $a \mid cd$

(۲) $d \mid cb$

(۳) $c \mid ab$

(۴) $b \mid cd$

۶۵- کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

(۱) $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b$ یا $a \mid c$

(۲) $b+c \mid a \Rightarrow c \mid a$ و $b \mid a$

(۳) $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$ یا $a \mid b$

(۴) $bc \mid a \Rightarrow b \mid a$ و $c \mid a$

۶۶- اگر $a^2 \mid b^2 + c^2$ و $a^2 > b^2 + c^2$ ، کدام رابطه الزاماً برقرار است؟

(۱) $|a| = |b| = |c| = 1$

(۲) $|b| = |c| = 1$

(۳) $a = b = c = 0$

(۴) $b = c = 0$

(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

۶۷- اگر $n^2 + 3 \mid n + 1$ و $n^2 + 3 \mid n$ ، چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸- اگر $a \mid c$ و $ab \mid c$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $b \mid c$ (۲) $a + b \mid c$ (۳) $a - b \mid c$ (۴) $a^2 \mid c$

۶۹- از رابطه $2x \mid 3y$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) $x \mid 6y$ (۲) $4x \mid 6y^2$ (۳) $2x \mid 18y^3$ (۴) $8x \mid 27y^2$

۷۰- a یک عدد طبیعی و P عدد اول فرد است. اگر داشته باشیم: $a \mid 6P$ و $3 \mid 5a$ ، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۱- به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $9^{n-1} \mid 6^{n+1}$ درست است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۲- چند عدد طبیعی n وجود دارد، به طوری که حاصل هر دو کسر $\frac{16}{3^{n-1}}$ و $\frac{6^{2n+1}}{162}$ عددی طبیعی باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۷۳- اگر p یک عدد اول باشد، آن‌گاه $2p^2$ بر چند عدد صحیح قابل قسمت است؟ ($p > 2$)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷۴- اگر $a^2 \mid 72$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱) $18 \mid a^2$ (۲) $12 \mid a$ (۳) $9 \mid a$ (۴) $16 \mid a^2$

۷۵- چند عدد طبیعی $a < 30$ وجود دارد به طوری که $a^2 \mid 24$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- چند عدد زوج سه‌رقمی و مضرب ۲۹ وجود دارد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۷۷- عدد 1080 بر چند عدد مثبت مضرب ۱۲ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۷۸- کوچک‌ترین n طبیعی به طوری که $81 \mid n^2$ و $160 \mid n^2$ ، کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۲۴۰

۷۹- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴) ۳۸

۸۰- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ ($\sqrt[3]{10} \approx 2.15$)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸۱- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $(a+b) \mid (a+b)^2 - 2ab$ (۲) $(a+b) \mid (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

- (۳) $(a+b) \mid (a-b)^3 + 3a^2b - 3b^2a$ (۴) $(a+b) \mid (a-b)^2 + 2ab$

۸۲- به ازای چند عدد طبیعی $n < 10$ ، رابطه $n! \mid n^2$ برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

ویژگی‌های عاد کردن (ترکیب خطی و ...)

۸۳- اگر $a \mid a - b$ ، آن‌گاه:

- (۱) $a \mid a - b$ (۲) $b \mid a - b$ (۳) $a \mid b$ (۴) $a - b \mid b$

۸۴- اگر $a^2 - b^2 \mid a$ ، کدام نتیجه ممکن است درست نباشد؟

- (۱) $a \mid b$ (۲) $a \mid a^2 + b^2$ (۳) $a \mid a^3 - b^3$ (۴) $a \mid a^3 + b^3$

۸۵- اگر $a + b \mid a - b$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد؟

- (۱) $a - b \mid 2a$ (۲) $a - b \mid 4a + b$ (۳) $a - b \mid 3a + b$ (۴) $a - b \mid 2b$

۸۶- به ازای چند مقدار طبیعی n ، کسر $\frac{11}{2n+3}$ عضو مجموعه اعداد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

(۱۴۰۰ خارج)

(۱۴۰۰ داخل)

(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

۸۷- مجموع مقادیر عدد صحیح n به طوری که $3n + 5 \mid n + 1$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح x هر دو رابطه $3a + 4 \mid x$ و $4a + 3 \mid x$ ، برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 4 (۴) 6

۸۹- اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) a عدد اول است. (۲) a مربع کامل است. (۳) $a \mid 24$ (۴) $a \mid 45$

۹۰- اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k + b$ و $a \mid 5k + b + 1$ ، به ازای چند مقدار یک‌رقمی طبیعی b ، عدد a اول است؟

- (۱) 6 (۲) 5 (۳) 4 (۴) 7

۹۱- برای چند عدد طبیعی n رابطه $2n^2 - 3n + 3 \mid 2n + 1$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) 4 (۳) 1 (۴) 2

۹۲- منحنی $2xy - 3x + y + 2 = 0$ از چند نقطه با مختصات طبیعی عبور می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۹۳- چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع هموگرافیک $y = \frac{x+3}{2x-1}$ قرار دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۹۴- به ازای کدام مقدار n هر سه رابطه $4^{2n-1} \mid 8^{n+1}$ ، $5k + 19 \mid n$ و $5 \mid k + 5$ برقرار است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) 8 (۲) 6 (۳) 3 (۴) نشدنی

۹۵- چند زوج مرتب به صورت (a, b) در اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که $a \mid b + 1$ و کسر $\frac{a+1}{b}$ طبیعی باشد؟

- (۱) بی‌شمار (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۹۶- به ازای چند مقدار طبیعی n داریم $n + 3 \mid (n + 1)^2$ ؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۹۷- اگر $7 \mid 2a + 3b$ ، آنگاه لزوماً کدام درست است؟

- (۱) $7 \mid 3a + b$ (۲) $7 \mid 3a + 5b$ (۳) $7 \mid 6a + 4b$ (۴) $7 \mid 3a + 4b$

۹۸- اگر $5 \mid 4k + 1$ ، کدام عبارت مضرب 25 است؟

- (۱) $16k^2 + 28k + 8$ (۲) $16k^2 + 28k + 4$ (۳) $16k^2 + 28k + 5$ (۴) $16k^2 + 28k + 6$

۹۹- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $5 \mid 4k + 1$. اگر $36 \mid 25k^2 + 40k + m$ ، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 41 (۲) 42 (۳) 43 (۴) 44

۱۰۰- اگر عدد طبیعی به صورت $2n + 1$ بر 5 بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده عدد طبیعی به صورت $19n + 14n^2$ ، بر 25 کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۱۰۱- اگر $9x + 5y \mid 11$ بخش‌پذیر باشد، برای این‌که لزوماً $10x + ky \mid 11$ بخش‌پذیر شود، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 8

۱۰۲- به ازای چند عدد صحیح k ، عبارت $k^2 + 2k + 1$ بر $k^2 + k + 1$ بخش‌پذیر است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) بی‌شمار

۱۰۳- اگر $a^5 \mid b^3$ ، کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- (۱) $a^2 \mid b^2$ (۲) $a \mid b$ (۳) $a^2 \mid b$ (۴) $a^4 \mid b^5$

۱۰۴- اگر $a^9 \mid b^5$ ، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $a^5 \mid b^3$ (۲) $a^5 \mid b^2$ (۳) $a^2 \mid b$ (۴) $a^7 \mid b^3$

اتحادها و بخش‌پذیری

۱۰۵- عدد $5^{24} - 4^{36}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

- (۱) 9 (۲) 11 (۳) 13 (۴) 12

۱۰۶- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $a^{12} + 1 \mid a^{52} - 1$ (۲) $a^4 + 1 \mid a^{12} + 1$ (۳) $a^3 + 1 \mid a^{15} + 1$ (۴) $a^{12} + 1 \mid a^{52} + 1$

۱۰۷- برای هر عدد صحیح a ، $a^{18} - 1$ بر کدام یک بخش‌پذیر نیست؟

- (۱) $a^6 + 1$ (۲) $a^3 + 1$ (۳) $a^6 - 1$ (۴) $a^3 - 1$

(کتاب درسی)

(تکنور تجدیدنظم ۱۴۰۱)

(کتاب درسی)

(خارج ۹۶)



۱۰۸- تعداد عضوهای مجموعه $\{1 + 2^n : n \in \mathbb{N}\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کم تر از ۱۰۰ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۰۹- باقی مانده تقسیم عدد $2^{42} - 3^{42}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۰- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

- (۱) $5^9 + 2^9 \mid 29$ (۲) $130 \mid 7^{20} - 3^{40}$ (۳) $33 \mid 1 + 2^{80}$ (۴) $1023 \mid 2^{80} - 1$



دلیل درستی (۴) را ببینید: گفتیم cd مضرب b است؛ پس $b \mid cd$. حالا طرف راست را در d ضرب کنیم (اجازه داریم طرف راست را در عدد دلخواه ضرب کنیم)؛ پس $b \mid cd^2$.

اما (۲) درست نیست. یعنی در مورد این که cb مضرب d هست، اطلاعی نداریم. **۶۵. گزینه ۴** در (۱) ادعا شده اگر جمع دو عدد بر a بخش پذیر باشد؛ حداقل یکی بر a بخش پذیر است. خوب این که درست نیست، مثلاً $3 + 5 = 8$ به 4 می خورد اما 3 یا 5 به 4 نمی خورند. در (۲) ادعا شده اگر عددی به جمع دو عدد بخش پذیر باشد، بر تک تک آن ها بخش پذیر است؛ مثلاً $5 = 3 + 2$ بر 3 بخش پذیر است اما به 2 یا 3 نمی خورد. در (۳) گفته شده اگر ضرب دو عدد به a بخورد، حداقل یکی به a بخش پذیر است. البته این درباره اعداد اول درست است اما در مورد اعداد مرکب درست نیست. مثال نقض می زنیم: $3 \times 4 = 12$ بر 6 بخش پذیر است اما 3 یا 4 به 6 نمی خورند. (۴) درست است. ببینید:

$$bc \mid a \Rightarrow a = bcq = b(cq) = bq' \Rightarrow b \mid a$$

$$bc \mid a \Rightarrow a = bcq = c(bq) = cq'' \Rightarrow c \mid a$$

یعنی اگر عددی به حاصل ضرب b و c بخورد، به تک تک آن ها هم می خورد. **۶۶. گزینه ۴** طبق ویژگی های رابطه عاقد کردن، اگر $x \mid y$ ، آن گاه حتماً $y = 0$ یا $|x| \leq |y|$ است. الان صورت سؤال گفته $b^2 + c^2 \mid a^2$ و $a^2 > b^2 + c^2$ ؛ یعنی قدر مطلق سمت راستی، از سمت چپی کم تر است، پس حتماً سمت راستی صفر بوده:

$$|a^2| < |b^2 + c^2| \Rightarrow b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow b = c = 0$$

سؤال گفته این نیست.

$$b^2 + c^2 \mid a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 0$$

تذکره ۱ چرا (۳) را انتخاب نکنیم؟ مگر $0 \mid 0$ درست نیست؟ (این را شما می پرسید) خوب چون رابطه $a^2 > b^2 + c^2$ به ازای $a = b = c = 0$ برقرار نمی شود.

۶۷. گزینه ۱ اگر دو عدد a و b هر دو بر هم بخش پذیر باشند، حتماً قدرمطلق آن ها برابر است: $a \mid b, b \mid a \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} n^2 + 3 \mid n+1 \\ n+1 \mid n^2 + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n^2 + 3 = \pm(n+1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} n^2 + 3 = n+1 &\Rightarrow n^2 - n + 2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ n^2 + 3 = -(n+1) &\Rightarrow n^2 + n + 4 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{aligned} \right.$$

۶۸. گزینه ۱ از رابطه $ab \mid c$ داریم: $c = abq$. بنابراین $c = b(aq) = bq'$ و در نتیجه $b \mid c$. برای سایر گزینه ها مثال نقض داریم: $3 \times 5 \mid 15$ اما $3 \times 5 \nmid 15, 3 + 5 \nmid 15, 3 - 5 \nmid 15$.

۶۹. گزینه ۴ از رابطه $2x \mid 3y$ اجازه داریم طرف راست را در هر ضریب ضرب کرده یا به هر توانی برسانیم. پس:

$$(۳) \quad 2x \mid 3y \xrightarrow[\text{ضرب می شود}]{\text{طرف راست در } ۶y^2} 2x \mid ۱۸y^3$$

هم چنین اجازه داریم دو طرف را در هر ضریب ضرب کنیم. پس:

$$(۲) \quad 2x \mid 3y \xrightarrow[\text{ضرب در } x^2]{\text{دو طرف}} 4x \mid 6y \xrightarrow[\text{ضرب در } y]{\text{طرف راست}} 4x \mid 6y^2$$

راستی می توانیم طرف چپ را کوچک تر کنیم. یعنی به جای طرف چپ، مقسوم علیه آن را قرار دهیم. پس:

$$(۱) \quad 2x \mid 3y \xrightarrow[\text{می توانیم } x \text{ بگذاریم}]{\text{به جای } 2x} x \mid 3y \xrightarrow[\text{ضرب در } ۲]{\text{طرف راست}} x \mid 6y$$

۵۹. گزینه ۴ (۱) درست است. هر عدد صحیح a بر ± 1 بخش پذیر است.

(۲) هم درست است. صفر بر هر عدد صحیح ab بخش پذیر است.

(۳) این گزینه می گوید اگر ab بر صفر بخش پذیر باشد، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$. این هم درست است. دقت کنید که اگر عددی بر صفر بخش پذیر باشد، آن عدد حتماً صفر است.

(۴) نادرست است. اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ ، یعنی a و b بر هم بخش پذیر باشند، آن گاه $|a| = |b|$ است. یعنی $a = \pm b$ ؛ پس نتیجه گیری $a = b$ (به تنهایی) درست نیست.

۶۰. گزینه ۳ $a^2 - 3a + 2$ باید صفر باشد تا بر صفر بخش پذیر بشود (سایر اعداد بر صفر تقسیم نمی شوند).

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 2$$

پس به ازای 2 عدد صحیح a برقرار است.

۶۱. گزینه ۳ $18 \mid n$ یعنی n مقسوم علیه 18 است و $n \nmid 2$ یعنی n فرد است پس دنبال مقسوم علیه های فرد 18 هستیم.

راه ۱ با کمی جستجو 18 بر اعداد فرد $1, 3, 9$ بخش پذیر است پس 3 تا مقدار طبیعی برای n داریم.

راه ۲ در تجزیه $18 = 2 \times 3^2$ داریم که چون مقسوم علیه فرد می خواهیم باید حتماً 3^2 را انتخاب نکنیم. بنابراین تجزیه مقسوم علیه فرد طبیعی به صورت 2 یا 3 است و 3 حالت دارد.

۶۲. گزینه ۳ در اعداد طبیعی کم تر از 50 دنبال مضارب 5 هستیم که مضرب 3 نباشند.

$$\left[\frac{49}{5} \right] = 9 \quad \text{تعداد مضارب } 5 \text{ از } 1 \text{ تا } 49 \text{ برابر است با:}$$

$$\left[\frac{49}{15} \right] = 3 \quad \text{در بین آن ها، } 3 \text{ عدد مضرب } 5 \text{ و } 3 \text{ یعنی مضرب } ۱۵ \text{ هستند:}$$

این اعداد (یعنی $۱۵, ۳۰$ و ۴۵) را نمی خواهیم.

$$9 - 3 = 6 \quad \text{پس جواب می شود:}$$

۶۳. گزینه ۴ طبق صورت سؤال، هر عدد صحیح n بر $m^2 - 3m + 1$ بخش پذیر شده است و این فقط وقتی امکان دارد که $m^2 - 3m + 1 = \pm 1$ باشد:

$$\left\{ \begin{aligned} m^2 - 3m + 1 = 1 &\Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } 3 \\ m^2 - 3m + 1 = -1 &\Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } 2 \end{aligned} \right.$$

پس m دارای مقادیر $0, 1, 2, 3$ است؛ یعنی بیش از 3 حالت دارد.

۶۴. گزینه ۲ از رابطه $ab = cd$ نتیجه می شود cd مضرب b و a است؛ پس $a \mid cd$ و $b \mid cd$. هم چنین ab مضرب c و d است؛ پس $c \mid ab$ و $d \mid ab$ و بنابراین گزینه های (۱)، (۳) و (۴) درست اند.

پس داریم: $1/72 \leq k < 17/2$
مقادیر صحیح k از ۲ تا ۱۷ هستند که تعدادشان ۱۶ است.
۷۷. گزینه ۲) کافی است تعداد اعداد مثبت k را طوری به دست آوریم که $1080 | k$ و $12 | k$ از رابطه دوم $k = 12q$ ، پس:

$$12q | 1080 \xrightarrow{\div 12} q | 90$$

پس q باید مقسوم‌علیه ۹۰ باشد:

$q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 30, 45, 90$
به ازای هر q دقیقاً یک k به دست می‌آید؛ پس ۱۲ مقدار برای k به دست می‌آید.
۷۸. گزینه ۱) در n^3 باید $3^4 = 81$ باشد پس در تجزیه n باید حداقل 3^2 داشته باشیم (3^1 کافی نیست).

در n^2 باید $5^1 \times 2^5 = 160$ باشد پس در تجزیه n باید $5^1 \times 2^3$ داشته باشیم پس n حتماً بر $3^2 \times 5^1 \times 2^3$ بخش‌پذیر است:
 $9 \times 5 \times 8 | n \Rightarrow 360 | n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n_{\min} = 360$
یعنی کم‌ترین مقدار طبیعی n برابر ۳۶۰ است.

۷۹. گزینه ۲) عدد را x^2 می‌نامیم. داریم: $18 | x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2 \times 3^2} \in \mathbb{Z}$
اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، x حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین:
از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$100000 \leq 36q^2 < 1000000$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 1000 \leq 6q < 1000\sqrt{10}$$

$$100 \leq 6q < 316 \Rightarrow 16/6 < q < 52/6$$

بنابراین $q \in \{17, 18, \dots, 52\}$ و در نتیجه به ازای $q \in \{17, 18, \dots, 52\}$ عدد رابطه برقرار است.

۸۰. گزینه ۳) فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت x^3 است. اگر x^3 بر ۹ بخش‌پذیر باشد، x باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:
 $x = 3q \Rightarrow x^3 = 27q^3$
حالا مقادیر سه و چهار رقمی x^3 را پیدا می‌کنیم:

$$100 \leq x^3 < 10000 \Rightarrow 100 \leq 27q^3 < 10000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{100} \leq 3q < \sqrt[3]{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3q \leq 10\sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1} \leq 3q \leq 10 \times 2/1$$

$$\Rightarrow 4/76 \leq 3q \leq 21 \Rightarrow 1/5 \leq q \leq 7$$

$$\Rightarrow q = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.
۸۱. گزینه ۲) گزینه‌های ۱) و ۴) به صورت $a+b | a^2 + b^2$ ساده می‌شوند که درست نیست ($\frac{2}{1}$ فرد نیست). ساده‌شده ۲) $a+b | a^3 + b^3$ ، ساده‌شده ۳) $a+b | a^2 - b^2$ اما در ۳) فرد است. اما در ۳) به $a+b | a^2 - b^2$ می‌رسیم که نادرست است. ($\frac{3}{1}$ زوج نیست).

۸۲. گزینه ۱) اگر دو طرف را بر n تقسیم کنیم، داریم:
 $n^2 | n! \xrightarrow{\div n} n | (n-1)!$
یعنی باید $(n-1)!$ به n بخورد.

اما هیچ‌وقت نمی‌توانیم به ۴ برسیم. چون طرف چپ از $2x$ به $8x$ رسیده و ۴ برابر شده اما طرف راست ۴ برابر نشده است.

۷۰. گزینه ۴) از رابطه $5a | 3$ ، یعنی این که $5a$ بر ۳ بخش‌پذیر است، چون ۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیست نتیجه می‌گیریم a مضرب ۳ است. پس $a = 3k$ یا $a = 3 | a$. حالا در رابطه $a | 6p$ داریم $3k | 6p$ و با تقسیم دو طرف بر ۳ نتیجه می‌شود $k | 2p$ و بنابراین k می‌تواند ۱ یا ۲ یا $2p$ باشد و ۴ جواب دارد.
پس برای $a = 3k$ هم ۴ جواب داریم.

تذکره ۱) دقت کنید که p عدد اول فرد است. (اگر $p = 2$ بود از رابطه $k | 2p$ فقط ۳ جواب داشتیم.)

۷۱. گزینه ۱) اگر $a > 1$ باشد $a^m | a^n$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $m \leq n$. پس:

$$9^{n-1} | 6^{n+1} \Rightarrow 3^{2n-2} | 3^{n+1} \times 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2n-2 \leq n+1 \Rightarrow n \leq 3 \Rightarrow n = 1, 2, 3$$

دقت دارید مهم این است که توان ۳ در سمت راست بیشتر باشد و عامل‌های ۲ مشکلی ایجاد نمی‌کنند.

پس به ازای سه عدد طبیعی یک‌رقمی رابطه گفته‌شده برقرار است.
۷۲. گزینه ۳) حاصل یک کسر وقتی عددی صحیح می‌شود که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد یا مخرج صورت را عاد کند؛ یعنی $a | b \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. اگر $a \neq 0, 1, -1$ ، داریم: $m \leq n \Leftrightarrow a^m | a^n$ (توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد).
اعداد را تجزیه می‌کنیم:

$$162 = 3^4 \times 2, 160 = 2^5 \times 5$$

$$2^5 \times 5 | 2^{n-1} \Rightarrow n-1 \geq 5 \text{ و } n \geq 6 \text{ (I)}$$

$$3^4 \times 2 | 3^{2n+1} \times 2^{n+1} \Rightarrow 2n+1 \geq 4 \text{ و } n \geq 1/2$$

توان عدد ۲ در سمت راست بزرگ‌تر یا مساوی از توان ۲ در سمت چپ است ($1 \leq 2n+1$). اما باید $4 \leq 2n+1$ نیز برقرار باشد؛ پس $\frac{3}{2} \leq n$.

چون n طبیعی است، باید $n \geq 2$ (II)
با اشتراک بین دو جواب (I) و (II)، $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (یعنی ۵ مقدار) می‌تواند داشته باشد.

۷۳. گزینه ۴) $2p^2$ بر $2p, p, 2, 1$ و p^2 بخش‌پذیر است. پس ۶ تا مقسوم‌علیه مثبت و ۱۲ تا مقسوم‌علیه صحیح دارد.

۷۴. گزینه ۳) باید a^2 بر $2^3 \times 3^2$ بخش‌پذیر باشد پس در تجزیه a حتماً عامل‌های 3^1 و 2^2 را داریم.

یعنی a بر ۱۲ بخش‌پذیر است (۲ درسته)
بنابراین a^2 به 12^2 بخش‌پذیر است:
و چون ۱۸ و ۱۶ مقسوم‌علیه ۱۴۴ هستند (۱) و (۴) هم درست‌اند.

اما (۳) می‌تواند نادرست باشد.
۷۵. گزینه ۲) از رابطه $a^2 | 24$ داریم:
 $2^3 \times 3 | a^2$
پس باید در تجزیه a حداقل 3^1 و 2^2 داشته باشیم؛ یعنی a مضرب ۱۲ است. در بین اعداد ۱ تا ۲۹ فقط دوتا عدد مضرب ۱۲ داریم: ۱۲، ۲۴.
پس دوتا جواب برای a داریم.

۷۶. گزینه ۱) عدد زوج مضرب ۲۹ حتماً به صورت $2k(29)$ یعنی $58k$ است. حالا باید سه‌رقمی باشد، پس داریم:
 $100 \leq 58k < 1000$
با تقسیم دو طرف بر a خواهیم داشت:
 $\xrightarrow{\div 58} \frac{100}{58} \leq k < \frac{1000}{58}$
 $\frac{100}{58}$ تقریباً می‌شود $17/2$.



پس فهمیدیم که $n+1 \mid 2$ ؛ یعنی $n+1$ باید ± 1 یا ± 2 باشد. مقادیر n عبارتند از:
 $n+1=1 \Rightarrow n=0, n+1=-1 \Rightarrow n=-2$
 $n+1=2 \Rightarrow n=1, n+1=-2 \Rightarrow n=-3$
 و مجموع آن‌ها $(-3)+(-2)+1+0=-4$ یعنی -4 است.

راه II از رابطه $x-a \mid f(a) \Rightarrow x-a \mid f(x)$ استفاده می‌کنیم، یعنی ریشه سمت چپ را در سمت راست جای گذاری می‌کنیم.

$$n+1 \mid 3n+5 \xrightarrow[n=-1]{n+1=0} n+1 \mid 3(-1)+5$$

$$\Rightarrow n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1=\pm 1, \pm 2 \Rightarrow n=0 \text{ یا } -2$$

۸۸. گزینه ۳ با استفاده از ویژگی ترکیب خطی، a را حذف کنیم:

$$\begin{cases} x \mid 3a+4 \\ x \mid 4a+3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} x \mid \begin{matrix} 4(3a+4) - 3(4a+3) \\ \text{ضرایب دلخواه} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x \mid 12a+16-12a-9 \Rightarrow x \mid 7 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ یا } \pm 7$$

پس برای ۴ مقدار صحیح x ، روابط مورد نظر سؤال برقرارند.

۸۹. گزینه ۱ سمت راست‌ها را به ترتیب در ۵ و ۹ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid 9k+4 \\ a \mid 5k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 5(9k+4) \\ a \mid 9(5k+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 45k+20 \\ a \mid 45k+27 \end{cases}$$

حالا طرف راست‌ها را از هم کم می‌کنیم تا $45k$ خط بخورند و داریم: $a \mid 7$ و با توجه به شرط $a > 1, a=7$ است که یک عدد اول است.

۹۰. گزینه ۲ هر عدد اول مثل p فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارد؛ پس اگر عدد طبیعی a عدد p را عاد کند ($a \mid p$)، نتیجه می‌گیریم $a=1$ یا $a=p$ ؛ مثلاً اگر a عددی طبیعی و $a \mid 7$ ، نتیجه می‌گیریم $a=1$ یا $a=7$. اگر $a > 1$ باشد نیز نتیجه می‌شود $a=7$.

گام اول: با ضرب سمت راست در اعداد مناسب کاری می‌کنیم تا k از بین برود:

$$a \mid 9k+b \xrightarrow{\times 5} a \mid 45k+5b$$

$$a \mid 5k+b+1 \xrightarrow{\times (-9)} a \mid -45k-9b-9$$

سمت راست دو رابطه را جمع می‌کنیم:

گام دوم: $a \mid x$ با $a \mid -x$ فرقی ندارد؛ پس رابطه گام دوم را می‌توانیم به صورت $a \mid 4b+9$ ببینیم.

$$b=1 \Rightarrow 4b+9=13$$

$$b=2 \Rightarrow 4b+9=17$$

$$b=3 \Rightarrow 4b+9=21$$

$$b=4 \Rightarrow 4b+9=25$$

$$b=5 \Rightarrow 4b+9=29$$

$$b=6 \Rightarrow 4b+9=33$$

$$b=7 \Rightarrow 4b+9=37$$

$$b=8 \Rightarrow 4b+9=41$$

$$b=9 \Rightarrow 4b+9=45$$

به ازای ۵ مقدار b ، $4b+9$ عددی اول می‌شود که با توجه به توضیحات بالا و $a > 1$ ، نیز به ازای این ۵ مقدار b عددی اول است.

۹۱. گزینه ۳ | راه I ریشه عبارت سمت چپ، $n = -\frac{1}{2}$ است و اگر آن را در سمت راست قرار بدهیم، کسری نمی‌شود، ببینید:

$$2n+1 \mid 2n^2-3n+3 \xrightarrow{n=-\frac{1}{2}} 2n+1 \mid 2(-\frac{1}{2})^2-3(-\frac{1}{2})+3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 5$$

برای $n=1, n=6, n=8, n=9$ این رابطه برقرار است اما برای n های اول و ۴، برقرار نمی‌شود؛ پس برای ۴ عدد طبیعی n ، رابطه مذکور برقرار است.

۸۳. گزینه ۴ خودمان یک رابطه بدیهی می‌نویسیم:
 $a-b \mid a-b$
 طبق صورت سؤال:

بنابراین: $a-b \mid a-(a-b) \Rightarrow a-b \mid b$
 بنابراین نتیجه گرفتیم:
 $a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b$

۸۴. گزینه ۱ اگر خودمان رابطه بدیهی $a \mid a^2$ را بنویسیم، داریم:

$$a \mid a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{طرف راست را از هم کم کنیم}} a \mid b^2$$

پس در مورد $a \mid b$ اطلاعی نداریم و ۱ لزوماً صحیح نیست.
 اما با $a \mid b^2$ و $a \mid a^2$ داریم: $a \mid a^2 + b^2$ ؛ یعنی ۲ درست است.

همچنین از $a \mid b^2$ ، طرف راست را بزرگ می‌کنیم و داریم $a \mid b^3$. حالا با $a \mid a^3$ و می‌توان گفت $a \mid a^3 \pm b^3$ و گزینه‌های ۳ و ۴ هم درست‌اند.

۸۵. گزینه ۲ از رابطه $a-b \mid a+b$ با کمک رابطه بدیهی $a-b \mid a-b$ ، داریم:

$$a-b \mid a+b \xrightarrow{\text{جمع}} a-b \mid 2a \quad (1)$$

$$a-b \mid a-b \xrightarrow{\text{تفریق}} a-b \mid 2b \quad (4)$$

حالا اگر طرف راست ۱ را با فرض سؤال جمع کنیم: $a-b \mid 2a+a+b$

که ۳ هم درست است؛ اما ۲ را نمی‌توانیم تأیید کنیم.

۸۶. گزینه ۱ این کسر وقتی عدد صحیح می‌شود که ۱۱ بر $2n+3$ بخش پذیر باشد؛ یعنی $2n+3$ یکی از اعداد ± 1 یا ± 11 شود:

$$2n+3=-1 \Rightarrow n=-2$$

$$2n+3=1 \Rightarrow n=-1$$

$$2n+3=-11 \Rightarrow n=-7$$

$$2n+3=11 \Rightarrow n=4$$

پس ۴ مقدار صحیح و فقط یک مقدار طبیعی برای n داریم.

تذکره ۱ از اول هم می‌شد گفت که وقتی n عدد طبیعی است، $2n+3$ از ۵ کم‌تر نخواهد بود؛ پس تنها عددی که ۱۱ بر آن بخش پذیر شود (و از ۵ کم‌تر نباشد)، ۱۱ است:
 $2n+3=11 \Rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=4$

یعنی یک مقدار طبیعی n داریم.

۸۷. گزینه ۴ | راه I از رابطه بدیهی $n+1 \mid n+1$ و ویژگی ترکیب خطی استفاده می‌کنیم:

$$n+1 \mid n+1$$

$$n+1 \mid 3n+5 \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} n+1 \mid -3(n+1)+1(3n+5) \Rightarrow n+1 \mid 2$$

ضرایب دلخواه

تذکره ۲ وقتی $a \mid b$ و $a \mid c$ ، می‌توان نتیجه گرفت $a \mid rb+sc$ که در آن r و s ضرایب دلخواه هستند و به ترکیب خطی c و b می‌گوییم.

پس $5 \mid 2n+1$ و بنابراین $2n+1$ باید ± 1 یا ± 5 باشد.

$$\begin{aligned} 2n+1=1 &\Rightarrow n=0 & 2n+1=5 &\Rightarrow n=2 \\ 2n+1=-1 &\Rightarrow n=-1 & 2n+1=-5 &\Rightarrow n=-3 \end{aligned}$$

پس فقط یک مقدار طبیعی $n=2$ داریم.

راه II اگر طرف راست را در ۲ ضرب کنیم (اجازه داریم)، می‌توانیم کل آن

را بر حسب $2n$ بنویسیم:

$$\begin{aligned} 2n+1 \mid 2n^2-3n+3 &\Rightarrow 2n+1 \mid 2(2n^2-3n+3) = 4n^2-6n+6 \\ &= (2n)^2-3(2n)+6 \end{aligned}$$

حالا ریشه سمت چپ، $2n=-1$ است.

$$\xrightarrow{2n=-1} 2n+1 \mid (-1)^2-3(-1)+6 \Rightarrow 2n+1 \mid 10$$

دقت کنید که $2n+1$ عددی فرد است و از بین اعدادی که 10 را می‌شمارند،

$2n+1$ فقط می‌تواند ± 1 یا ± 5 باشد؛ پس داریم:

که فقط یک مقدار طبیعی $n=2$ را می‌دهند.

۹۲. گزینه ۲ اول ضابطه منحنی را اصلاح کنیم:

$$2xy-3x+y+2=0 \Rightarrow 2xy+y=3x-2$$

$$\Rightarrow y(2x+1)=3x-2 \Rightarrow y=\frac{3x-2}{2x+1}$$

پس باید $2x+1 \mid 3x-2$ و داریم:

$$2x+1 \mid 3x-2 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 2x+1=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 2x+1=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}} 2x+1 \mid 3(-\frac{1}{2})-2=-\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2x+1 \mid -7 \Rightarrow 2x+1=\pm 1, \pm 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x=3$$

تنها جواب طبیعی $x=3$ است که به ازای آن، $y=1$ می‌شود؛ پس فقط نقطه $(3,1)$ را داریم.

۹۳. گزینه ۴ باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد: $2x-1 \mid x+3$ و می‌دانیم $2x-1 \mid 2x-1$.

طبق قانون ترکیب خطی داریم:

بنابراین $2x-1 \mid -7$ پس $2x-1$ باید ± 1 یا ± 7 باشد که از آن $x=1, 0, 4, -3$ یعنی ۴ نقطه.

۹۴. گزینه ۲ اگر n و m دو عدد طبیعی و $a^m \mid a^n$ ، $(a>1)$ ، آن‌گاه

$$a^{n+1} \mid a^{2n-1} \Rightarrow a^{2n+2} \mid a^{4n-2}$$

باید $m \leq n$.

$$\Rightarrow 3n+3 \leq 4n-2 \Rightarrow 5 \leq n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} n \mid 5k+19 \\ n \mid k+5 \end{array} \right. &\xrightarrow{\times 5} n \mid 5k+25 \\ &\xrightarrow{\text{کم}} n \mid 6 \end{aligned}$$

با توجه به دو شرط (۱) و (۲) فقط $n=6$ قابل قبول است.

۹۵. گزینه ۳ کسر $\frac{a+1}{b}$ وقتی طبیعی می‌شود که صورت بر مخرج

بخش‌پذیر باشد. داریم:

$$\begin{aligned} a \mid b+1 &\Rightarrow ab \mid ab+a+b+1 \Rightarrow ab \mid a+b+1 \\ b \mid a+1 &\end{aligned}$$

اگر a و b هر دو بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، $ab > a+b+1$ و رابطه برقرار نمی‌شود؛ پس با جست‌وجو داریم:

$$a=1 \Rightarrow b \mid 2 \Rightarrow b=1, 2 \Rightarrow (1,1), (1,2)$$

$$a=2 \Rightarrow b \mid 3, 2 \mid b+1 \Rightarrow b=1, 3 \Rightarrow (2,1), (2,3)$$

$$a=3 \Rightarrow 3 \mid b+1, b \mid 4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow (3,2)$$

پس ۵ زوج مرتب وجود دارد.

۹۶. گزینه ۲ به نظر نمی‌آید $n+3$ بتواند بیشتر از $(n+1)^2$ باشد. ببینیم:

$$a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

$$(n+1)^2 \mid n+3 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} n \in \mathbb{N} \\ n+3 \neq 0 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} n \in \mathbb{N} \\ n+3 \neq 0 \end{smallmatrix}} |(n+1)^2| \leq |n+3|$$

$$\xrightarrow{\text{هر دو مثبت هستند}} (n+1)^2 \leq n+3 \Rightarrow n^2+2n+1 \leq n+3$$

$$\Rightarrow n^2+n-2 \leq 0 \Rightarrow (n+2)(n-1) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq n \leq 1$$

پس تنها مقدار طبیعی n ، که امکان برقراری عاдекردن را می‌دهد، $n=1$ است.

$$\xrightarrow{n=1} (1+1)^2 \mid 1+3 \Rightarrow 4 \mid 4$$

کنترل کنیم:

پس $n=1$ قبول است و فقط همین یک مقدار را برای n داریم.

۹۷. گزینه ۱ می‌دانیم $7 \mid 7a+7b$ پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 \mid 7a+7b \\ 7 \mid 7a+3b \end{array} \right. \xrightarrow{\text{طرف‌های راست را از هم کم می‌کنیم}} 7 \mid 5a+4b$$

دوباره فرض سؤال را بنویسیم:

اگر طرف راست‌ها را کم کنیم:

این ۱ است.

راه II باید a و b طوری باشند که $7 \mid 7a+3b$ و $a=4$ و $b=4$ مثلاً $a=1$ و $b=4$ می‌تواند باشد. حالا این مقادیر را در گزینه‌ها جای‌گذاری کنید، می‌بینید که فقط

$$3a+b=3(1)+(4)=7 \Rightarrow 7 \mid 3a+b \quad (1) \quad \text{درست است.}$$

۹۸. گزینه ۴ اول دو طرف رابطه $5 \mid 4k+1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$5^2 \mid (4k+1)^2 \Rightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1 \quad (1)$$

حالا یک بار هم دو طرف رابطه $5 \mid 4k+1$ را در ۵ ضرب می‌کنیم:

حالا چون سمت چپ‌های (۱) و (۲) یکی هستند؛ پس سمت راست‌ها را با هم

جمع می‌کنیم:

۹۹. گزینه ۳ اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $a^n \mid b^n$ و $ka \mid kb$ ، بنابراین:

$$6 \mid 5k+1 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \text{دو طرف را به} \\ \text{توان ۲ می‌رسانیم.} \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \text{دو طرف را به} \\ \text{توان ۲ می‌رسانیم.} \end{smallmatrix}} 36 \mid 25k^2+10k+1$$

$$\begin{aligned} 6 \mid 5k+1 &\xrightarrow[\begin{smallmatrix} \text{دو طرف را در} \\ \text{۶ ضرب می‌کنیم.} \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \text{دو طرف را در} \\ \text{۶ ضرب می‌کنیم.} \end{smallmatrix}} 36 \mid 30k+6 \\ &+ \\ &36 \mid 25k^2+10k+1 \end{aligned}$$

هر عدد خودش را عاد می‌کند؛ پس:

$$\begin{aligned} 36 \mid 25k^2+10k+7 &\xrightarrow{(+)} 36 \mid 25k^2+10k+43 \\ 36 \mid 36 &\end{aligned}$$

۱۰۰. گزینه ۴ از رابطه $5 \mid 2n+1$ داریم:

$$\begin{aligned} 5 \mid 2n+1 &\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 \mid 4n^2+4n+1 \\ &\xrightarrow[\begin{smallmatrix} \text{طرف راست} \\ \text{برابر} \end{smallmatrix}]{\times 5} 25 \mid 10n+5 \end{aligned}$$

حالا طبق ویژگی ترکیب خطی می‌نویسیم:

$$25 \mid (4n^2+4n+1) + (10n+5) + (10n^2+5n)$$

$$25 \mid 14n^2+19n+6$$

پس:

یعنی این عبارت بر ۲۵ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده می‌شود صفر.

راه II $n=2$ شرط مسئله را برقرار می‌کند. $n=2 \Rightarrow 5 \mid 2n+1$

حالا جواب $14n^2+19n+6$ می‌شود $14 \times 4 + 19 \times 2 + 6$ یعنی ۱۰۰ که

باقی‌مانده‌اش بر ۲۵، صفر است.



۱۰۸. گزینه ۳ | راه I ۶۵ به صورت $۱ + ۲^۶$ است؛ پس داریم $۱ + ۲^n | ۲^۶ + ۱$. شرطش این است که $\frac{n}{۶}$ فرد باشد؛ پس باید n مضرب فرد ۶ باشد. مقادیر n از ۱ تا ۹۹ عبارتند از:
 $۱ \times ۶, ۳ \times ۶, ۵ \times ۶, ۷ \times ۶, ۹ \times ۶, ۱۱ \times ۶, ۱۳ \times ۶, ۱۵ \times ۶$
 یعنی ۸ مقدار برای n داریم.

راه II تعداد کل مضارب ۶ از ۱ تا ۹۹ برابر با $16 = [\frac{99}{6}]$ است. نصف آن‌ها مضرب فرد هستند، پس ۸ تا مضرب فرد ۶ داریم. یعنی ۸ مقدار برای n داریم.

۱۰۹. گزینه ۱ از مساوی بودن توان‌ها، به یاد $a^n - b^n$ می‌افتیم، پس باید ۳۵ را هم به صورت $a^p + b^p$ یا $a^p - b^p$ بنویسیم.
 $۳۵ = ۲^۳ + ۳^۳$ حالا دقت کنیم که $۲^{۴۲} - ۳^{۴۲} | ۳^۳ + ۲^۳$ (چون $\frac{۴۲}{۳}$ زوج است)، پس این عدد بر ۳۵ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده، صفر است.

۱۱۰. گزینه ۳ در ۱، اگر به جای ۲۹ بنویسیم $۲^۲ + ۵^۲$ ، آن وقت داریم $۵^{۹۰} + ۲^{۹۰} | ۲^۲ + ۵^۲$ که چون $\frac{۹۰}{۲} = ۴۵$ فرد است، بخش‌پذیر است.

در ۲، می‌نویسیم $(۳^۲)^{۷۲} - (۲^۳)^{۷۲} | ۷۲^۲ - ۹۲^۲$ ، یعنی $۱۳^۰ | ۷۲^۰ - ۹۲^۰$. حالا دقت کنیم که $۷۲^۰ - ۹۲^۰$ بر $۷^۲ + ۹^۲$ بخش‌پذیر است، یعنی به $۱۳^۰ = ۴۹ + ۸۱$ می‌خورد.
 در ۳، اگر ۳۳ را به صورت $۲^۵ + ۱$ بنویسیم، باید $۲^{۸۰} + ۱ | ۲^۵ + ۱$ شرطش این است که $\frac{۸۰}{۵} = ۱۶$ فرد باشد که نیست؛ پس ۳ نادرست است.

در ۴، اگر ۱۰۲۳ را $۱۱ - ۲^{۱۰} - ۲^{۱۰} - ۱$ بنویسیم، داریم $۲^{۱۰} - ۱ | ۲^{۸۰} - ۱$ ، چون $\frac{۸۰}{۱۰}$ عدد طبیعی است، این هم درست است. پس ۳ نادرست بود.

۱۰۱. گزینه ۴ داریم $۱۱ | ۹x + ۵y$ و $۱۱ | ۱۰x + ky$. حالا x را با ترکیب خطی حذف می‌کنیم:
 $۱۱ | ۹(۱۰x + ky) - ۱۰(۹x + ۵y)$
 $\Rightarrow ۱۱ | ۹kx - ۵ky - ۹x + ۵y \Rightarrow ۱۱ | (۹k - ۵)y$
 پس k باید طوری انتخاب شود که $۹k - ۵$ به ۱۱ بخورد؛ در نتیجه $k = ۸$ مناسب است و $۲۲ = ۵۰ - ۹(۸)$ به ۱۱ می‌خورد.

۱۰۲. گزینه ۳
 $k^۲ + k + ۱ | k^۲ + ۲k + ۱$
 $I) k^۲ + k + ۱ | k^۲ + k + ۱ \xrightarrow{\times k} k^۲ + k + ۱ | k^۳ + k^۲ + k$
 سمت راست دو رابطه را کم می‌کنیم تا نتیجه شود: $k^۲ + k + ۱ | k^۲ - k - ۱$
 دوباره سمت راست دو رابطه (I) و (II) را کم می‌کنیم: $k^۲ + k + ۱ | ۲k + ۲$
 الف) اگر $k \geq ۲$ باشد، سمت چپ بزرگ‌تر از سمت راست بوده و رابطه برقرار نمی‌شود.
 ب) به ازای $k = ۰, -۱$ رابطه برقرار است و به ازای $k = ۱$ برقرار نیست.
 پ) به ازای $k = -۲$ نیز باز هم سمت چپ بزرگ‌تر شده و رابطه برقرار نمی‌شود؛ پس به ازای دو مقدار صحیح، رابطه عاقد کردن برقرار می‌شود.

۱۰۳. گزینه ۳ اگر $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ باشد، از رابطه $a^n | b^m$ می‌توان نتیجه گرفت $a^s | b^r$. پس باید گزینه‌ای را انتخاب کرد که $\frac{r}{s} \leq \frac{۳}{۵}$ برقرار نباشد. بین گزینه‌ها، ۳ مناسب است.

$a^۵ | b^۳ \nRightarrow a^۲ | b^۱$ ($\frac{۳}{۵} \nless \frac{۱}{۲}$)
۱۰۴. گزینه ۱ باید $\frac{۵}{۹} \leq \frac{r}{s}$ باشد؛ پس $a^۵ | b^۳$ مناسب است، زیرا $\frac{۵}{۹} \leq \frac{۳}{۵}$.

۱۰۵. گزینه ۳ ما در مورد بخش‌پذیری $a^n - b^n$ بر $a^p - b^p$ می‌توانیم نظر بدهیم. پس اول $۴^{۳۶} - ۵^{۲۴}$ را به صورت توان‌های مساوی درمی‌آوریم:
 $۵^{۲۴} - ۴^{۳۶} = (۵^۲)^{۱۲} - (۴^۳)^{۱۲} = ۲۵^{۱۲} - ۶۴^{۱۲}$
 این عدد بر $۶۴ - ۲۵$ ، یعنی ۳۹ بخش‌پذیر است و بنابراین به ۱۳ می‌خورد.
 $۵^{۲۴} - ۴^{۳۶} = (۲۵^{۱۲} - ۶۴^{۱۲}) \Rightarrow ۱۳ | ۲۵^{۱۲} - ۶۴^{۱۲}$

۱۰۶. گزینه ۴ شرط‌ها را مرور کنیم:
 برای $a^p + b^p | a^n + b^n$ لازم است $\frac{n}{p}$ فرد باشد؛ پس:

۳: $(۵ = \frac{۱۵}{۳})$ فرد است $a^۳ + ۱ | a^{۱۵} + ۱$

۲: $(۳ = \frac{۱۲}{۴})$ فرد است $a^۴ + ۱ | a^{۱۲} + ۱$

۴: $(۴ = \frac{۵۲}{۱۳})$ فرد نیست $a^{۱۳} + ۱ \nmid a^{۵۲} + ۱$

برای $a^p + b^p | a^n - b^n$ لازم است $\frac{n}{p}$ زوج باشد؛ پس:

۱: $(۴ = \frac{۵۲}{۱۳})$ زوج است $a^{۱۳} + ۱ | a^{۵۲} - ۱$

۱۰۷. گزینه ۱ شرط بخش‌پذیری $a^n - b^n$ بر $a^p + b^p$ این است که $\frac{n}{p}$ زوج باشد. پس ۱ غلط است:

$a^۶ + ۱ \nmid a^{۱۸} - ۱$ ($۳ = \frac{۱۸}{۶}$ زوج نیست)

اما ۲ درست است: $a^۳ + ۱ | a^{۱۸} - ۱$ ($۶ = \frac{۱۸}{۳}$ زوج است)

در مورد گزینه‌های ۳ و ۴ هم شرط بخش‌پذیری $a^n - b^n$ بر $a^p - b^p$ ، این است که $\frac{n}{p}$ عدد طبیعی باشد؛ یعنی n به p بخورد. چون ۱۸ به ۶ و ۳ می‌خورد.

۴: $(\frac{۱۸}{۳} = ۶)$ طبیعی است $a^۳ - ۱ | a^{۱۸} - ۱$

۳: $(\frac{۱۸}{۶} = ۳)$ طبیعی است $a^۶ - ۱ | a^{۱۸} - ۱$